

# **La Categoría Algebraica de Módulos Cruzados de Álgebras Conmutativas**

**Pablo Fernández Ascariz (ascariz14@mixmail.com)**

Departamento de Álgebra, Universidad de Santiago de

Compostela

Tutor: Manuel Ladra González

Los módulos cruzados en grupos fueron introducidos a finales de los años cuarenta por Whitehead en el estudio de los grupos de homotopía relativos. Módulos cruzados de álgebras conmutativas son objetos con una rica estructura y proporcionan una generalización simultánea de los conceptos de ideal y módulo sobre un anillo. Por tanto es interesante plantear generalizaciones de conceptos y estructuras de álgebras conmutativas a módulos cruzados de álgebras conmutativas.

Los objetivos de este trabajo son dos. En primer lugar presentamos la relación entre álgebras conmutativas y módulos cruzados de álgebras conmutativas mediante el álgebra de los multiplicadores. Esto nos lleva a la noción de actor de un módulo cruzado y a la generalización del aniquilador de álgebras conmutativas.

Nuestro segundo objetivo es probar que la categoría de módulos cruzados de álgebras conmutativas es algebraica sobre la categoría de conjuntos. Para ello se demuestra que el funtor de olvido de módulos cruzados a conjuntos,  $(C, R, \nu) \rightarrow C \times R$ , es tripeable. Siguiendo este esquema los principales resultados que hemos obtenido son los siguientes:

1. La categoría  $XMod_K$  de módulos cruzados de álgebras conmutativas es una categoría semiabeliana. El concepto de categoría semiabeliana introducido por Janelidze, Márki y Tholen es el marco adecuado para capturar las propiedades algebraicas válidas para grupos, anillos y álgebras del mismo modo que las categorías abelianas son el marco para el tratamiento generalizado de grupos abelianos y módulos.
2. La categoría  $XMod_K$  no es equilibrada, es decir, monomorfismo y epimorfismo no implica isomorfismo. También probamos que existen epimorfismos que no son sobreyectivos.
3. En la categoría  $XModK$  los epimorfismos regulares son los morfismos sobreyectivos.
4. La categoría  $XModK$  es algebraica sobre la categoría de conjuntos  $Set$ , es decir, el funtor de olvido  $U : XModK \rightarrow Set, (C, R, \nu) \rightarrow C \times R$  es tripleable.

5. Se introducen los conceptos de actor y aniquilador de un módulo cruzado de álgebras conmutativas que generalizan los conceptos de las multiplicaciones y aniquilador, respectivamente, de álgebras conmutativas. El concepto de actor nos permite definir una acción de módulo cruzado sobre otro módulo cruzado y así podemos hablar del producto semidirecto de módulos cruzados. Comprobamos que este punto de vista externo del producto semidirecto es equivalente al punto de vista interno, y como consecuencia hablar de producto semidirecto de módulos cruzados es equivalente a hablar de extensiones rotas de módulos cruzados.

6. Se obtiene que si

$$0 \rightarrow (C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu) \rightarrow (C'', R'', \nu'') \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de módulos cruzados, entonces existe un homomorfismo

$(\varepsilon, \theta) : (C, R, \nu) \rightarrow A(C', R', \nu')$  que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow (C', R', \nu') & & \rightarrow (C, R, \nu) & \rightarrow & (C'', R'', \nu'') \rightarrow 0 \\ & \downarrow & (\varepsilon, \theta) \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow I(C', R', \nu') & \rightarrow & A(C', R', \nu') & \rightarrow & O(C', R', \nu') \rightarrow 0 \end{array}$$

donde  $A(C', R', \nu')$  es el actor del módulo cruzado e  $I(C', R', \nu)$ ,  $O(C', R', \nu)$  son el actor interior y exterior, respectivamente.

## Bibliografía consultada más importante

- [1] M. Barr y J. Beck, *Homology and standard constructions*, en “Seminar on Triples and Categorical Homology Theory” (B. Eckmann, ed.). Lecture Notes in Mathematics, vol. 80. Springer, 1969, pp. 245-335.
- [2] M. Barr y C. Wells, *Toposes, triples and theories*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 278, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [3] P. Carrasco, A. M. Cegarra y A. R.-Grandjeán, *(Co)Homology of crossed modules*. Journal of Pure and Applied Algebra **168** (2002) 147-176.
- [4] J.M. Casas y M. Ladra, *The actor of a crossed module in Lie algebras*, Communications in Algebra **26** (1998) 2065-2089.
- [5] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras. II*, Ann. Math. **84** (1966) 1-19.
- [6] G. Janelidze, L. Márki y W. Tholen, *Semi-abelian categories*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002) 367-386.
- [7] R. Lavendhome y Th. Lucas, *On modules and crossed modules*, J. Algebra **179** (1996) 936-963.
- [8] S. Lichtenbaum y M. Schlessinger, *The cotangent complex of a morphism*, Trans. Amer. Math. Soc. **128** (1967) 41-70.
- [9] A.S.-T. Lue, *Non-abelian cohomology of associative algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **19** (1968) 159-180.
- [10] A.S.-T. Lue, *Semicomplete crossed modules and holomorphs of groups*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979) 8-16.

- [11] K.J. Norrie, *Actions and automorphisms of crossed modules*. Bull. Soc. math. France **118** (1990) 129-146.
- [12] T. Porter, *Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconcelos*, Journal of Algebra, **99** (1986) 458-465.
- [13] T. Porter, *Some Categorical Results in the Theory of Crossed Modules in Commutative Algebras*, Journal of Algebra, **109** (1987) 415-429.
- [14] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial Homotopy II*. Bull.Amer. Math. Soc. **55** (1949) 453-496.